

ALJABAR LINIER

BERBASIS PYTHON

Dr. Eko Wahyu Wibowo, M.Si.
Nurmaita Hamsyiah, M.Si.
Wiwik Tri Hardianti, S.Si., M.Mat.



Aljabar Linier Berbasis Python

Dr. Eko Wahyu Wibowo, M.Si.

Nurmaita Hamsyiah, M.Si.

Wiwik Tri Hardianti, S.Si., M.Mat.

PT BUKULOKA LITERASI BANGSA

Anggota IKAPI: No. 645/DKI/2024



Aljabar Linier Berbasis Python

Penulis : Dr. Eko Wahyu Wibowo, M.Si., Nurmaita Hamsyiah, M.Si., dan Wiwik Tri Hardianti, S.Si., M.Mat.
ISBN : 978-634-324-056-3 (PDF)
Penyunting Naskah : Ananda Salsa Sabila, S.S.
Tata Letak : Ananda Salsa Sabila, S.S.
Desain Sampul : Novikean Keysah Sanisri

Penerbit

Penerbit PT Bukuloka Literasi Bangsa

Distributor: PT Yapindo

Kompleks Business Park Kebon Jeruk Blok I No. 21, Jl. Meruya Ilir Raya No.88, Desa/Kelurahan Meruya Utara, Kec. Kembangan, Kota Adm. Jakarta Barat, Provinsi DKI Jakarta, Kode Pos: 11620

Email: penerbit.blb@gmail.com

Whatsapp: 0878-3483-2315

Website: bukuloka.com

© Hak cipta dilindungi oleh undang-undang

Berlaku selama 50 (lima puluh) tahun sejak ciptaan tersebut pertama kali dilakukan pengumuman.

Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini tanpa izin tertulis dari penerbit.

Ketentuan Pidana Sanksi Pelanggaran UU No. 28 Tahun 2014 Tentang Hak Cipta.

1. Barang siapa dengan sengaja dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 2 ayat (1) atau Pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling singkat 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (Tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).
2. Barang siapa dengan sengaja menyerahkan, menyiarkan, memamerkan, mengedarkan atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran Hak Cipta atau Hak Terkait sebagaimana dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas tersusunnya buku ajar berjudul *Aljabar Linier Berbasis Python* dapat diselesaikan dengan baik. Buku ini disusun sebagai upaya untuk menjembatani pemahaman konsep-konsep aljabar linier dengan implementasi pemrograman menggunakan Python.

Di era digital saat ini, penguasaan matematika saja tidak cukup tanpa kemampuan mengaplikasikannya dalam bentuk komputasi. Oleh karena itu, buku ini menghadirkan pendekatan teoritis sekaligus praktis agar pembaca dapat memahami konsep aljabar linier secara lebih mendalam dan aplikatif. Materi dalam buku ini disajikan secara sistematis mulai dari konsep dasar vektor, matriks, sistem persamaan linear, hingga implementasinya menggunakan pustaka Python seperti NumPy dan SciPy. Dengan pendekatan ini, diharapkan pembaca tidak hanya memahami konsep matematis, tetapi juga mampu mengimplementasikannya dalam pemrograman komputer.

Semoga buku ini dapat memberikan manfaat bagi mahasiswa, dosen, dan siapa saja yang ingin mempelajari aljabar linier berbasis python yang mendukung kemandirian dan keberlanjutan energi nasional.

Jakarta, Juli 2026

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	iii
DAFTAR ISI	iv
BAB I.....	1
PENGANTAR ALJABAR LINIER	1
BAB 2	15
VEKTOR DAN OPERASINYA	15
BAB 3	27
MATRIKS DAN OPERASINYA DALAM PYTHON	27
BAB 4.....	44
SISTEM PERSAMAAN LINIER (SPL)	44
BAB 5	61
DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS.....	61
BAB 6	78
NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN.....	78
BAB 7	96
PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS (PCA)	96
BAB 8	111
RUANG VEKTOR DAN SUBRUANG.....	111
BAB 9	123
TRANSFORMASI LINIER.....	123
BAB 10.....	144
DEKOMPOSISI MATRIKS.....	144
BAB 11.....	161
ALJABAR LINIER UNTUK MACHINE LEARNING	161
DAFTAR PUSTAKA	177
PROFIL PENULIS	180

BAB I

PENGANTAR ALJABAR LINIER

Gambaran Umum Bab

Aljabar linier merupakan cabang matematika yang mempelajari vektor, matriks, ruang vektor, sistem persamaan linier, transformasi linier, serta berbagai operasi yang bekerja pada objek-objek tersebut. Bidang ini menjadi fondasi penting dalam informatika karena banyak persoalan komputasi modern dapat dinyatakan dalam bentuk vektor dan matriks.

Dalam pemrograman, data jarang berdiri sebagai angka tunggal. Data biasanya tersusun sebagai daftar nilai, tabel, citra, sinyal, atau kumpulan fitur. Semua bentuk tersebut dapat direpresentasikan dengan vektor dan matriks. Karena itu, aljabar linier membantu mahasiswa memahami bagaimana komputer menyimpan, mengolah, dan menafsirkan data secara numerik.

Bab ini memperkenalkan konsep dasar aljabar linier, perannya dalam informatika, lingkup pembelajaran, serta penggunaan Python sebagai alat bantu komputasi. Pembahasan dibuat sebagai dasar untuk bab-bab berikutnya, terutama sistem persamaan linier, matriks, ruang vektor, transformasi linier, dekomposisi matriks, dan machine learning.

Tujuan Pembelajaran

- Menjelaskan pengertian aljabar linier dan objek utama yang dipelajari di dalamnya.
- Mengidentifikasi hubungan antara vektor, matriks, ruang vektor, dan transformasi linier.
- Menjelaskan peran aljabar linier dalam komputasi numerik, machine learning, grafika komputer, visi komputer, sistem rekomendasi, dan optimasi.
- Menjelaskan lingkup pembelajaran aljabar linier dalam konteks informatika.
- Menggunakan Python, NumPy, SciPy, SymPy, Jupyter Notebook, dan Matplotlib sebagai alat bantu komputasi dasar.
- Menyusun alur pemodelan komputasional sederhana berbasis operasi aljabar linier.

1.1 Konsep Dasar Aljabar Linier

Aljabar linier berfokus pada struktur matematika yang dapat direpresentasikan secara linier. Kata linier merujuk pada hubungan yang dapat dinyatakan melalui penjumlahan dan perkalian skalar. Dalam konteks ini, vektor dapat dijumlahkan, dikalikan dengan bilangan, disusun sebagai kolom atau baris, lalu diproses menggunakan matriks.

Konsep aljabar linier banyak muncul dalam persoalan sehari-hari di bidang komputasi. Contohnya, citra digital dapat dilihat sebagai matriks intensitas piksel. Data mahasiswa dapat disusun sebagai matriks fitur. Koordinat objek dalam grafika komputer dapat diubah dengan matriks transformasi. Model machine learning dapat dilatih dengan operasi matriks dan vektor.

1.1.1 Definisi Aljabar Linier

Aljabar linier adalah bidang matematika yang mempelajari vektor, ruang vektor, matriks, sistem persamaan linier, transformasi linier, nilai eigen, dan vektor eigen. Fokus utamanya adalah memahami hubungan linier antarobjek matematika dan menggunakan hubungan tersebut untuk menyelesaikan masalah.

Dalam bentuk paling sederhana, aljabar linier menjawab pertanyaan seperti berikut.

- Bagaimana sebuah sistem persamaan linier dapat diselesaikan secara efisien?
- Bagaimana data dapat ditulis sebagai vektor atau matriks?
- Bagaimana suatu objek berubah ketika dikalikan dengan matriks?
- Bagaimana informasi penting dapat diekstraksi dari matriks besar?
- Bagaimana model komputasi dapat dihitung dengan operasi matriks?

Contoh sistem persamaan linier sederhana adalah sebagai berikut.

$$2x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

Sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Penulisan matriks membuat persoalan menjadi lebih ringkas. Selain itu, bentuk $Ax = b$ dapat langsung dihitung menggunakan komputer.

1.1.2 Vektor, Skalar, dan Ruang Vektor

Vektor adalah objek matematika yang memiliki beberapa komponen. Dalam informatika, vektor sering digunakan untuk menyimpan fitur suatu data. Misalnya, data rumah dapat direpresentasikan sebagai vektor yang berisi luas bangunan, jumlah kamar, dan harga.

$$v = [\text{luas}, \text{jumlah kamar}, \text{harga}]$$

Skalar adalah bilangan tunggal yang digunakan untuk mengalikan vektor. Jika sebuah vektor dikalikan dengan skalar, setiap komponennya ikut dikalikan. Contohnya, jika $v = [2, 4]$ dan $c = 3$, maka hasil perkalian skalarnya adalah sebagai berikut.

$$cv = 3[2, 4] = [6, 12]$$

Ruang vektor adalah himpunan vektor yang tertutup terhadap penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Artinya, jika dua vektor berada dalam ruang tersebut, hasil penjumlahannya tetap berada dalam ruang yang sama. Jika sebuah vektor dikalikan skalar, hasilnya juga tetap berada dalam ruang yang sama.

Tabel 1.1 Perbedaan skalar, vektor, matriks, dan ruang vektor

Konsep	Makna	Contoh
Skalar	Bilangan tunggal yang dapat mengalikan vektor.	2, -5, 0,75
Vektor	Objek yang memiliki beberapa komponen.	[3, 4], [1, 2, 5]
Matriks	Susunan bilangan dalam baris dan kolom.	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
Ruang vektor	Himpunan vektor yang memenuhi operasi penjumlahan dan perkalian skalar.	$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, ruang polinomial

Contoh ruang vektor yang paling umum adalah $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. $\mathbb{R}^2$ berisi semua pasangan bilangan real (x, y) , sedangkan $\mathbb{R}^3$ berisi semua tripel bilangan real (x, y, z) . Dalam pembelajaran informatika, ruang berdimensi tinggi juga sering digunakan karena dataset dapat memiliki puluhan, ratusan, bahkan ribuan fitur.

1.1.3 Hubungan Aljabar Linier dengan Matematika Terapan

Aljabar linier memiliki hubungan kuat dengan matematika terapan karena banyak fenomena dunia nyata dapat dimodelkan dalam bentuk sistem linier. Ketika suatu persoalan dapat dinyatakan sebagai vektor, matriks, atau sistem persamaan, aljabar linier menyediakan alat untuk menganalisis dan menyelesaikannya.

Dalam teknik, aljabar linier digunakan untuk menganalisis struktur, rangkaian listrik, sinyal, dan sistem kendali. Dalam ekonomi, matriks dapat digunakan untuk memodelkan hubungan antarsektor, arus biaya, dan portofolio. Dalam sains data, matriks digunakan untuk menyimpan dataset dan menghitung model prediksi.

Tabel 1.2 Peran aljabar linier dalam matematika terapan

Bidang	Bentuk Masalah	Peran Aljabar Linier
Fisika dan teknik	Simulasi struktur, aliran fluida, rangkaian listrik.	Menyusun dan menyelesaikan sistem persamaan linier.
Ekonomi	Model input-output, optimasi, portofolio.	Merepresentasikan hubungan antarkomponen dengan matriks.
Sains data	Dataset besar dan model prediksi.	Mengolah data dalam bentuk matriks fitur.
Komputer grafis	Perubahan posisi dan bentuk objek.	Menggunakan matriks transformasi untuk rotasi, skala, dan proyeksi.

1.1.4 Peran Struktur Aljabar dalam Pemodelan

Pemodelan adalah proses menyederhanakan suatu persoalan nyata ke dalam bentuk matematika. Struktur aljabar membantu proses ini karena menyediakan objek yang sistematis, seperti vektor, matriks, fungsi linier, dan ruang vektor.

Dalam pemodelan komputasional, vektor biasanya digunakan untuk merepresentasikan satu objek. Matriks digunakan untuk merepresentasikan kumpulan objek atau transformasi. Transformasi linier digunakan untuk menjelaskan perubahan objek dari satu keadaan ke keadaan lain.

- Matriks sebagai representasi data: dataset dapat disusun dalam bentuk baris dan kolom.
- Vektor sebagai representasi fitur: satu baris data dapat dilihat sebagai satu vektor fitur.
- Transformasi linier sebagai operasi perubahan: objek dapat diputar, diperbesar, diperkecil, atau diproyeksikan.
- Dekomposisi matriks sebagai ekstraksi informasi: struktur tersembunyi dalam data dapat dianalisis melalui faktorisasi matriks.

Contoh sederhana dapat dilihat pada data mahasiswa. Setiap mahasiswa dapat direpresentasikan sebagai vektor yang berisi nilai tugas, nilai ujian, kehadiran, dan nilai proyek. Kumpulan mahasiswa kemudian membentuk matriks data. Dari matriks tersebut, komputer dapat menghitung rata-rata, korelasi, prediksi kelulusan, atau segmentasi performa.

Kesimpulan bagian 1.1: aljabar linier menyediakan bahasa matematika untuk menyusun, mengolah, dan menafsirkan data. Vektor, matriks, ruang vektor, dan transformasi linier menjadi dasar bagi banyak metode komputasi modern.

1.2 Peran Aljabar Linier dalam Informatika

Informatika banyak berurusan dengan data, algoritma, visualisasi, dan pengambilan keputusan berbasis komputasi. Hampir semua proses tersebut memerlukan representasi numerik. Aljabar linier berperan sebagai fondasi karena mampu mengubah masalah menjadi bentuk yang dapat diproses oleh komputer.

Pada bagian ini, peran aljabar linier dibahas dalam empat area utama: komputasi numerik, machine learning dan data science, grafika komputer dan visi komputer, serta sistem rekomendasi dan optimasi.

1.2.1 Komputasi Numerik

Komputasi numerik adalah bidang yang menggunakan metode numerik untuk menyelesaikan masalah matematika dengan bantuan komputer. Banyak masalah tidak mudah diselesaikan secara manual, terutama jika ukurannya besar. Aljabar linier membantu menyusun algoritma agar perhitungan dapat dilakukan secara efisien.

Contoh penting dalam komputasi numerik adalah penyelesaian sistem persamaan linier. Jika jumlah persamaan sedikit, solusi dapat dicari secara manual. Namun, jika sistem memiliki ribuan variabel, komputer harus menggunakan metode seperti eliminasi Gauss, dekomposisi LU, dekomposisi QR, atau metode iteratif.

- Eliminasi Gauss digunakan untuk menyederhanakan sistem persamaan linier.
- Dekomposisi LU memecah matriks menjadi matriks segitiga bawah dan segitiga atas.
- Dekomposisi QR banyak digunakan dalam least squares dan regresi numerik.
- Metode iteratif digunakan ketika matriks sangat besar dan penyelesaian langsung terlalu mahal secara komputasi.

1.2.2 Machine Learning dan Data Science

Machine learning dan data science sangat bergantung pada aljabar linier. Data biasanya disusun sebagai matriks fitur X , target disimpan sebagai vektor y , dan parameter model ditulis sebagai vektor bobot. Proses pelatihan model dilakukan dengan operasi matriks dan optimasi numerik.

$$\hat{y} = Xw + b$$

Persamaan tersebut menunjukkan prediksi model linier. X adalah matriks fitur, w adalah vektor bobot, b adalah bias, dan $\hat{y}$ adalah prediksi. Bentuk ini muncul dalam regresi linier, klasifikasi linier, dan jaringan saraf.

Selain itu, konsep nilai eigen dan vektor eigen digunakan dalam Principal Component Analysis atau PCA. PCA membantu mereduksi dimensi data dengan memilih arah yang menyimpan variasi terbesar. Teknik ini berguna ketika dataset memiliki banyak fitur dan perlu disederhanakan tanpa kehilangan terlalu banyak informasi.

1.2.3 Grafika Komputer dan Visi Komputer

Grafika komputer menggunakan aljabar linier untuk memanipulasi objek digital. Titik pada layar dapat ditulis sebagai vektor koordinat. Ketika objek diputar, diperbesar, diperkecil, atau diproyeksikan, operasi tersebut dapat ditulis sebagai perkalian matriks.

Tabel 1.3 Jenis transformasi dalam grafika komputer

Transformasi	Tujuan	Bentuk Umum
Skala	Mengubah ukuran objek.	Mengalikan koordinat dengan faktor skala.
Rotasi	Memutar objek terhadap titik asal atau pusat tertentu.	Menggunakan matriks rotasi.
Translasi	Menggeser objek ke posisi baru.	Menggunakan koordinat homogen.
Proyeksi	Mengubah objek 3D ke tampilan 2D.	Menggunakan matriks proyeksi.

Dalam visi komputer, citra digital dapat dipandang sebagai matriks piksel. Operasi seperti deteksi tepi, segmentasi citra, pengenalan wajah, dan klasifikasi gambar menggunakan operasi matriks. Bahkan model deep learning untuk citra, seperti convolutional neural network, tetap menggunakan operasi dasar vektor dan matriks.

1.2.4 Sistem Rekomendasi dan Optimasi

Sistem rekomendasi digunakan untuk memprediksi item yang mungkin disukai pengguna. Contohnya adalah rekomendasi film, produk, musik, berita, atau konten media sosial. Dalam banyak sistem, interaksi pengguna dan item disusun sebagai matriks. Baris menunjukkan pengguna, kolom menunjukkan item, dan elemen matriks menunjukkan rating, klik, pembelian, atau bentuk interaksi lain.

$$R \approx UV^T$$

Persamaan tersebut menunjukkan ide faktorisasi matriks. Matriks interaksi R didekati oleh perkalian dua matriks yang lebih kecil, yaitu U dan V^T . Matriks U dapat merepresentasikan profil pengguna, sedangkan V dapat merepresentasikan profil item. Dengan cara ini, sistem dapat memprediksi nilai interaksi yang belum diketahui.

Aljabar linier juga berperan dalam optimasi. Banyak model machine learning dilatih dengan mencari nilai parameter yang meminimalkan fungsi loss. Proses ini menggunakan gradien, matriks Hessian, norma vektor, dan operasi matriks lainnya.

Kesimpulan bagian 1.2: aljabar linier bukan sekadar teori matematika, tetapi alat kerja utama dalam informatika. Komputasi numerik, machine learning, grafika komputer, visi komputer, sistem rekomendasi, dan optimasi semuanya menggunakan konsep vektor dan matriks.

1.3 Lingkup dan Tujuan Pembelajaran

Pembelajaran aljabar linier dalam konteks informatika tidak hanya menekankan kemampuan menghitung secara manual. Mahasiswa juga perlu memahami makna konsep, mampu menghubungkannya dengan masalah komputasi, dan dapat menerapkannya menggunakan perangkat lunak.

Lingkup pembelajaran meliputi konsep dasar vektor dan matriks, sistem persamaan linier, determinan, ruang vektor, transformasi linier, nilai eigen, dekomposisi matriks, serta implementasi komputasional menggunakan Python.

1.3.1 Kompetensi yang Diharapkan

Setelah mempelajari aljabar linier, mahasiswa diharapkan memiliki kompetensi sebagai berikut:

- Memahami konsep vektor, matriks, ruang vektor, basis, dimensi, transformasi linier, eigen, dan dekomposisi matriks.
- Mampu menyelesaikan sistem persamaan linier dengan metode analitik dan komputasional.
- Mampu menggunakan operasi matriks untuk menyelesaikan persoalan informatika.
- Mampu mengimplementasikan perhitungan aljabar linier menggunakan Python dan pustaka numerik.
- Mampu memvisualisasikan vektor, transformasi, dan hasil komputasi secara sederhana.
- Mampu menafsirkan hasil perhitungan dalam konteks data, model, dan aplikasi digital.

Tabel 1.4 Kompetensi pembelajaran aljabar linier

Kompetensi	Indikator	Contoh Aktivitas
Konseptual	Menjelaskan makna vektor, matriks, dan transformasi.	Membaca bentuk $Ax = b$ dan menjelaskan komponennya.
Prosedural	Melakukan operasi matriks dan menyelesaikan sistem linier.	Menghitung invers atau menyelesaikan persamaan dengan eliminasi.
Komputasional	Menggunakan Python untuk menghitung operasi aljabar linier.	Menggunakan NumPy untuk perkalian matriks.
Aplikatif	Menghubungkan konsep dengan kasus informatika.	Menganalisis data sederhana atau transformasi objek 2D.

1.3.2 Relevansi Industri Digital

Industri digital membutuhkan kemampuan mengolah data, membangun model prediksi, mengembangkan sistem cerdas, dan membuat visualisasi yang akurat. Semua kemampuan tersebut membutuhkan dasar aljabar linier. Mahasiswa yang memahami aljabar linier akan lebih mudah mempelajari machine learning, data science, artificial intelligence, computer vision, dan grafika komputer.

Dalam industri digital, aljabar linier digunakan pada berbagai pekerjaan teknis. Data analyst menggunakan matriks untuk mengolah dataset. Machine learning engineer menggunakan operasi matriks untuk melatih model. Computer vision engineer menggunakan matriks untuk membaca dan memproses citra. Game developer menggunakan transformasi linier untuk memutar dan memindahkan objek.

Tabel 1.5 Relevansi aljabar linier dalam industri digital

Peran Industri	Kebutuhan Aljabar Linier	Contoh Penggunaan
Data analyst	Matriks data, korelasi, reduksi dimensi.	Menganalisis data pelanggan.
Machine learning engineer	Vektor bobot, matriks fitur, optimasi.	Membangun model prediksi.
Computer vision engineer	Matriks citra, transformasi, filter.	Mengenali objek dalam gambar.
Game developer	Transformasi koordinat dan proyeksi.	Menggerakkan objek 2D dan 3D.
Backend engineer	Optimasi dan rekomendasi berbasis data.	Membangun sistem rekomendasi produk.

1.3.3 Keterkaitan dengan Mata Kuliah Lain

Aljabar linier memiliki keterkaitan langsung dengan banyak mata kuliah dalam informatika. Materi ini berfungsi sebagai prasyarat konseptual untuk memahami metode komputasi yang lebih lanjut.

Tabel 1.6 Keterkaitan aljabar linier dengan mata kuliah lain

Mata Kuliah	Keterkaitan dengan Aljabar Linier
Pemrograman	Array, list, operasi numerik, dan representasi data.
Struktur Data dan Algoritma	Representasi graf, matriks ketetanggaan, dan analisis komputasi.
Metode Numerik	Penyelesaian sistem persamaan, aproksimasi, dan galat numerik.
Machine Learning	Matriks fitur, bobot model, optimasi, PCA, dan jaringan saraf.
Data Mining	Clustering, reduksi dimensi, dan pemrosesan dataset besar.
Grafika Komputer	Transformasi linier, koordinat homogen, dan proyeksi.
Computer Vision	Representasi citra, filter, segmentasi, dan ekstraksi fitur.

Dengan memahami aljabar linier sejak awal, mahasiswa akan lebih siap mengikuti mata kuliah lanjutan. Banyak rumus pada mata kuliah tersebut menjadi lebih mudah dipahami karena memiliki bentuk dasar yang sama, yaitu operasi vektor dan matriks.

1.3.4 Capaian Pembelajaran Lulusan

Capaian pembelajaran lulusan yang didukung oleh mata kuliah aljabar linier mencakup kemampuan analitis, kemampuan komputasional, dan kemampuan menerapkan konsep matematika dalam pemecahan masalah informatika.

- Menganalisis masalah komputasi yang dapat dinyatakan dalam bentuk vektor dan matriks.
- Menyelesaikan persoalan numerik menggunakan metode aljabar linier yang sesuai.
- Menggunakan Python dan pustaka komputasi ilmiah untuk menyelesaikan masalah aljabar linier.
- Menginterpretasikan hasil komputasi dalam konteks data dan sistem digital.
- Mengembangkan solusi berbasis data yang memanfaatkan operasi matriks, transformasi, atau dekomposisi.

Capaian tersebut menegaskan bahwa aljabar linier tidak berdiri sebagai materi teoritis semata. Mata kuliah ini mendukung kemampuan teknis yang dibutuhkan dalam pengembangan teknologi informasi, analisis data, riset komputasi, dan industri digital.

Kesimpulan bagian 1.3: lingkup pembelajaran aljabar linier mencakup pemahaman teori, keterampilan hitung, implementasi Python, dan penerapan pada masalah informatika. Kompetensi ini menjadi bekal penting untuk mata kuliah lanjutan dan kebutuhan industri digital.

1.4 Pengenalan Python sebagai Alat Komputasi

Python adalah bahasa pemrograman yang banyak digunakan dalam komputasi ilmiah, data science, machine learning, dan visualisasi data. Python dipilih karena sintaksnya relatif mudah dipahami, ekosistem pustakanya lengkap, dan komunitasnya besar. Dalam pembelajaran aljabar linier, Python digunakan untuk menghitung operasi numerik, menguji konsep, dan memvisualisasikan hasil.

Penggunaan Python tidak menggantikan pemahaman matematika. Python berfungsi sebagai alat bantu agar mahasiswa dapat menghitung matriks besar, memeriksa solusi, dan melihat efek geometris dari suatu operasi. Dengan begitu, pembelajaran menjadi lebih konkret dan aplikatif.

1.4.1 Python untuk Matematika

Python memiliki banyak pustaka untuk komputasi matematika. Beberapa pustaka yang paling sering digunakan dalam aljabar linier adalah NumPy, SciPy, SymPy, Matplotlib, dan Pandas.

Tabel 1.7 Pustaka Python untuk komputasi matematika

Pustaka	Fungsi Utama	Contoh Penggunaan
NumPy	Array, vektor, matriks, dan operasi numerik.	Perkalian matriks, invers, norma, determinan.
SciPy	Komputasi ilmiah lanjutan.	Dekomposisi matriks, optimasi, metode numerik.
SymPy	Aljabar simbolik.	Menyelesaikan persamaan secara eksak.
Matplotlib	Visualisasi data dan grafik.	Membuat plot vektor atau transformasi.
Pandas	Pengolahan data tabular.	Membaca CSV dan menyusun dataset.

Pada tahap awal, mahasiswa cukup memahami NumPy karena pustaka ini menjadi dasar operasi vektor dan matriks di Python. Setelah itu, SciPy dan SymPy dapat digunakan untuk kebutuhan yang lebih khusus.

1.4.2 Pustaka NumPy dan SciPy

NumPy menyediakan struktur data array n-dimensi. Struktur ini dapat digunakan untuk merepresentasikan vektor, matriks, dan tensor. NumPy juga menyediakan modul `np.linalg` untuk operasi aljabar linier, seperti invers matriks, determinan, rank, nilai eigen, dan penyelesaian sistem persamaan linier.

Contoh berikut menunjukkan operasi dasar matriks menggunakan NumPy.

```
import numpy as np

# Membuat dua matriks
A = np.array([
    [1, 2],
    [3, 4]
])

B = np.array([
    [5, 6],
    [7, 8]
])

# Penjumlahan matriks
C = A + B

# Perkalian matriks
D = A @ B
```

```
# Determinan matriks A
det_A = np.linalg.det(A)

print("A + B =")
print(C)

print("A @ B =")
print(D)

print("Determinan A =", det_A)
```

Output program tersebut adalah sebagai berikut.

```
A + B =
[[ 6  8]
 [10 12]]

A @ B =
[[19 22]
 [43 50]]

Determinan A = -2.0000000000000004
```

Nilai determinan ditampilkan sebagai -2.0000000000000004 karena komputer menggunakan representasi floating point. Secara matematis, nilai determinannya adalah -2.

SciPy digunakan ketika mahasiswa membutuhkan fungsi komputasi ilmiah yang lebih luas. Misalnya, `scipy.linalg` menyediakan dekomposisi LU, QR, SVD, dan fungsi pemecahan sistem linier yang lebih lengkap.

1.4.3 Jupyter Notebook sebagai Lingkungan Kerja

Jupyter Notebook adalah lingkungan kerja interaktif yang memungkinkan pengguna menulis teks, rumus, kode, output, dan visualisasi dalam satu dokumen. Alat ini cocok untuk pembelajaran aljabar linier karena mahasiswa dapat menulis penjelasan, menjalankan kode, lalu langsung melihat hasilnya.

Dalam Jupyter Notebook, satu topik dapat disusun sebagai rangkaian cell. Cell pertama berisi penjelasan konsep. Cell berikutnya berisi kode Python. Cell berikutnya lagi berisi interpretasi hasil. Format ini membantu mahasiswa memahami hubungan antara teori, kode, dan output.

- Markdown cell digunakan untuk menulis penjelasan, rumus, dan catatan.
- Code cell digunakan untuk menjalankan program Python.
- Output cell menampilkan hasil perhitungan, tabel, atau grafik.
- Notebook dapat disimpan dan dibagikan sebagai dokumen pembelajaran yang reproducible.

1.4.4 Alur Pemodelan Komputasional

Alur pemodelan komputasional adalah urutan kerja untuk mengubah masalah menjadi bentuk komputasi, menjalankan perhitungan, lalu menafsirkan hasilnya. Dalam aljabar linier, alur ini membantu mahasiswa menggunakan konsep matematika secara sistematis.

1. Merumuskan masalah. Tentukan apa yang ingin dihitung atau dianalisis.
2. Menyusun data. Ubah informasi menjadi vektor, matriks, atau tabel numerik.
3. Memilih operasi aljabar linier. Tentukan apakah perlu penjumlahan matriks, perkalian matriks, invers, dekomposisi, atau penyelesaian sistem linier.
4. Mengimplementasikan perhitungan. Gunakan Python dan pustaka yang sesuai.
5. Memvisualisasikan hasil. Gunakan grafik, tabel, atau plot untuk membaca pola.
6. Menginterpretasikan hasil. Jelaskan makna angka atau visualisasi dalam konteks masalah.

Contoh alur sederhana dapat dilihat pada penyelesaian sistem persamaan linier berikut.

```
import numpy as np

# Sistem persamaan:
# 2x + y = 5
# x - y = 1

A = np.array([
    [2, 1],
    [1, -1]
])

b = np.array([5, 1])
```

```
solusi = np.linalg.solve(A, b)

print("Solusi [x, y] =", solusi)
```

Outputnya adalah sebagai berikut.

```
Solusi [x, y] = [2. 1.]
```

Hasil tersebut berarti $x = 2$ dan $y = 1$. Jika disubstitusikan kembali, kedua persamaan terpenuhi. Contoh ini menunjukkan bagaimana bentuk matematika $Ax = b$ dapat langsung diselesaikan dengan Python.

Kesimpulan bagian 1.4: Python membantu mahasiswa menerapkan aljabar linier secara praktis. NumPy digunakan untuk operasi dasar, SciPy untuk komputasi ilmiah, SymPy untuk simbolik, Matplotlib untuk visualisasi, dan Jupyter Notebook untuk pembelajaran interaktif.

Rangkuman Bab

- Aljabar linier mempelajari vektor, matriks, ruang vektor, sistem persamaan linier, transformasi linier, serta konsep terkait seperti nilai eigen dan dekomposisi matriks.
- Dalam informatika, aljabar linier digunakan untuk merepresentasikan data, memproses citra, membangun model machine learning, menjalankan komputasi numerik, dan mengoptimalkan sistem.
- Vektor dapat merepresentasikan satu objek atau satu baris data. Matriks dapat merepresentasikan kumpulan data atau operasi transformasi.
- Machine learning menggunakan aljabar linier pada matriks fitur, vektor bobot, fungsi loss, optimasi, PCA, dan jaringan saraf.
- Grafika komputer dan visi komputer menggunakan matriks untuk transformasi koordinat, representasi citra, dan pemrosesan visual.
- Python menjadi alat penting untuk menerapkan aljabar linier karena mendukung NumPy, SciPy, SymPy, Matplotlib, Pandas, dan Jupyter Notebook.

Latihan Mandiri

1. Jelaskan pengertian aljabar linier dengan bahasa Anda sendiri.
2. Berikan tiga contoh penggunaan vektor dalam informatika.
3. Jelaskan perbedaan skalar, vektor, dan matriks.
4. Mengapa dataset dapat direpresentasikan sebagai matriks?
5. Jelaskan hubungan aljabar linier dengan machine learning.
6. Jelaskan peran matriks dalam grafika komputer.
7. Buat contoh matriks 2×2 , lalu hitung determinannya secara manual.
8. Gunakan Python untuk menjumlahkan dua matriks 2×2 .
9. Gunakan Python untuk menyelesaikan sistem persamaan $3x + 2y = 12$ dan $x - y = 1$.
10. Susun alur sederhana pemodelan komputasional untuk kasus prediksi harga rumah.

BAB 2

VEKTOR DAN OPERASINYA

Gambaran Umum Bab

Vektor merupakan konsep dasar dalam aljabar linier. Melalui vektor, berbagai besaran yang memiliki arah dan besar dapat dinyatakan secara matematis.

Dalam komputasi, vektor digunakan untuk menyimpan data numerik, fitur objek, representasi citra, sinyal, hingga bobot dalam model machine learning.

Bab ini membantu mahasiswa memahami konsep vektor secara teoritis sekaligus menerapkannya melalui operasi numerik dan Python.

Tujuan Pembelajaran

- Menjelaskan pengertian vektor sebagai objek yang memiliki besar dan arah.
- Membedakan notasi vektor baris dan vektor kolom.
- Menjelaskan interpretasi geometris vektor dalam ruang dua dimensi dan tiga dimensi.
- Melakukan operasi dasar vektor, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian skalar, dan kombinasi linier.
- Menghitung panjang vektor, dot product, sudut antar vektor, dan proyeksi vektor.
- Menggunakan Python dan NumPy untuk merepresentasikan serta menghitung operasi vektor.

2.1 Pengertian dan Notasi Vektor

Vektor adalah objek matematika yang memiliki dua karakteristik utama, yaitu besar dan arah. Dalam fisika, vektor digunakan untuk menyatakan posisi, kecepatan, gaya, dan percepatan. Dalam informatika, vektor digunakan untuk merepresentasikan data, fitur, citra, teks, dan sinyal dalam bentuk numerik.

Secara sederhana, vektor dapat dipandang sebagai daftar bilangan yang disusun secara teratur. Setiap bilangan di dalam vektor disebut komponen. Jika sebuah vektor memiliki n komponen, maka vektor tersebut berada dalam ruang $\mathbb{R}^n$.

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

2.1.1 Vektor sebagai Elemen Ruang

Vektor dapat dipahami sebagai elemen dari suatu ruang vektor. Ruang vektor adalah himpunan vektor yang tertutup terhadap dua operasi utama, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Jika dua vektor dijumlahkan, hasilnya tetap berada dalam ruang yang sama. Jika sebuah vektor dikalikan dengan skalar, hasilnya juga tetap berada dalam ruang yang sama.

Sebagai contoh, $\mathbb{R}^3$ adalah ruang yang memuat semua vektor dengan tiga komponen. Vektor (x, y, z) dalam $\mathbb{R}^3$ dapat menggambarkan posisi titik di ruang tiga dimensi. Semua vektor dalam ruang ini dapat dijumlahkan, dikurangkan, dan dikalikan dengan bilangan real.

Inti Konsep

Vektor bukan hanya anak panah dalam gambar. Dalam aljabar linier dan komputasi, vektor adalah struktur numerik yang dapat dioperasikan secara sistematis.

2.1.2 Notasi Baris dan Kolom

Vektor dapat ditulis dalam bentuk baris atau kolom. Kedua bentuk ini memuat informasi yang sama, tetapi penggunaannya berbeda dalam operasi matriks.

Tabel 2.1 Notasi vektor baris dan kolom

Bentuk	Notasi	Keterangan
Vektor baris	$v = [v_1 \ v_2 \ v_3]$	Komponen ditulis mendatar. Bentuk ini sering muncul dalam penyajian data.
Vektor kolom	$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$	Komponen ditulis vertikal. Bentuk ini paling sering digunakan dalam operasi matriks.

Dalam aljabar linier, bentuk kolom sering menjadi bentuk utama karena perkalian matriks biasanya ditulis sebagai Ax , dengan x sebagai vektor kolom.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdi, H., & Williams, L. J. (2010). Principal component analysis. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2(4), 433–459. <https://doi.org/10.1002/wics.101>
- Alpaydin, E. (2020). *Introduction to machine learning* (4th ed.). MIT Press.
- Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: Applications version* (11th ed.). Wiley.
- Axler, S. (2024). *Linear algebra done right* (4th ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-41026-0>
- Bishop, C. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning*. Springer.
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.
- Géron, A. (2022). *Hands-on machine learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow* (3rd ed.). O'Reilly Media.
- Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep learning*. MIT Press.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., et al. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585, 357–362. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- Hearn, D., & Baker, M. P. (2011). *Computer graphics: C version* (2nd ed.). Prentice Hall.
- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). *Matrix analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
- Jackson, J. E. (1991). *A user's guide to principal components*. Wiley.

- James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R., & Taylor, J. (2023). *An introduction to statistical learning with applications in Python*. Springer.
- Jolliffe, I. T. (2002). *Principal component analysis* (2nd ed.). Springer.
- Jolliffe, I. T., & Cadima, J. (2016). Principal component analysis: A review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 374(2065), 20150202. <https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0202>
- Kluyver, T., et al. (2016). Jupyter Notebooks: A publishing format for reproducible computational workflows. In *Positioning and power in academic publishing* (pp. 87–90). IOS Press.
- Kolman, B., & Hill, D. R. (2004). *Elementary linear algebra* (8th ed.). Pearson.
- Koren, Y., Bell, R., & Volinsky, C. (2009). Matrix factorization techniques for recommender systems. *Computer*, 42(8), 30–37.
- Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Pearson.
- Lay, D. C. (2016). *Linear algebra and its applications* (5th ed.). Pearson.
- Lay, D. C., Lay, S. R., & McDonald, J. J. (2021). *Linear algebra and its applications* (6th ed.). Pearson.
- McKinney, W. (2010). Data structures for statistical computing in Python. *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*, 51–56.
- Meurer, A., et al. (2017). SymPy: Symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*, 3, e103. <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103>
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization* (2nd ed.). Springer.
- NumPy Developers. (n.d.). NumPy documentation. <https://numpy.org/doc/>
- Oliphant, T. E. (2006). *Guide to NumPy*. Trelgol Publishing.
- Pedregosa, F., et al. (2011). Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12, 2825–2830.

- Pearson, K. (1901). On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*, 2(11), 559–572. <https://doi.org/10.1080/14786440109462720>
- Shapiro, L. G., & Stockman, J. T. (2001). *Computer vision*. Prentice Hall.
- Strang, G. (2016). *Introduction to linear algebra* (5th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Strang, G. (2019). *Linear algebra and learning from data*. Wellesley-Cambridge Press.
- Strang, G. (2023). *Introduction to linear algebra* (6th ed.). Wellesley-Cambridge Press.
- Trefethen, L. N., & Bau, D. (1997). *Numerical linear algebra*. SIAM. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719574>
- Turk, M., & Pentland, A. (1991). Eigenfaces for recognition. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 3(1), 71–86.
- van Rossum, G., & Drake, F. L. (2009). *Python 3 reference manual*. Python Software Foundation.
- Virtanen, P., et al. (2020). SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python. *Nature Methods*, 17, 261–272. <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>

Buku ajar berjudul **Aljabar Linier Berbasis Python** membahas konsep-konsep dasar hingga lanjutan dalam aljabar linier dengan pendekatan komputasional menggunakan bahasa pemrograman Python. Buku ini dirancang untuk membantu pembaca memahami keterkaitan antara teori matematika dan implementasinya dalam dunia pemrograman modern.

Pembahasan dimulai dari pengenalan vektor dan matriks, operasi-operasi dasar, determinan, invers matriks, hingga sistem persamaan linear. Selanjutnya, buku ini juga menguraikan penerapan aljabar linier dalam komputasi numerik menggunakan pustaka Python seperti NumPy, SciPy, dan SymPy.

Selain teori dan praktik, buku ini juga menekankan pemahaman intuitif melalui contoh-contoh pemrograman yang mudah diikuti. Dengan demikian, buku ini ditujukan untuk masyarakat umum yang ingin mengembangkan kemampuan dalam bidang matematika komputasi, data science, dan machine learning.